第５講　微分法・積分法

1　a を整数とする．直線 $y=2(x-1)$ が曲線 $y=ax^3+(1-2a)x$　$(a\neq0)$ に接するように a の値を定めよ．また，この２つのグラフによって囲まれる部分の面積を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　xy 平面において，不等式 $y \leqq x^3-3p^2(x-2)-q$ で定まる領域を D，不等式 $1 \leqq x \leqq 2$，$y \leqq 0$ で定まる領域を E とする．E が D に含まれるための p，q についての条件を求めよ．また，この条件をみたす $(p,\ q)$ の領域を pq 平面に図示せよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 平面上で不等式

$0 \leqq y \leqq 2x \leqq 6$ および $-x^2+4x-3 \leqq y \leqq 2$

を同時に満たす領域を D とする．

(1) a は $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲の定数とする．このとき，不等式 $a \leqq x \leqq a+1$ を満たす領域と D との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ．

(2) a が $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値および最小値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　微分法・積分法

[1]　a を整数とする．直線 $y=2(x-1)$ が曲線 $y=ax^3+(1-2a)x$ $(a\neq 0)$ に接するように a の値を定めよ．また，この２つのグラフによって囲まれる部分の面積を求めよ．

$y=ax^3+(1-2a)x$　より　$y'=3ax^2+(1-2a)$

$x=t$ におけるこの曲線の接線の方程式は　$y=(3at^2+1-2a)(x-t)+at^3+(1-2a)t$

つまり　$y=(3at^2+1-2a)x-2at^3$　である．

これが　$y=2x-2$ と一致するのは

　$3at^2+1-2a=2$　……①　かつ　$-2at^3=-2$　……②　のとき

①より　$(3t^2-2)a=1$　　②より　$t^3a=1$

よって　$(3t^2-2)a=t^3a$　　$a\neq 0$ より　$3t^2-2=t^3$　すなわち　$t^3-3t^2+2=0$

　$(t-1)(t^2-2t-2)=0$　　$t=1,\ 1\pm\sqrt{3}$

$t=1$ のとき　$a=1$　　$t=1\pm\sqrt{3}$ のとき　$a=\dfrac{1}{(1\pm\sqrt{3})^3}=\dfrac{-5\pm 3\sqrt{3}}{4}$　　よって，不適．

ゆえに　$a=1$

このとき，曲線の方程式は $y=x^3-x$，接線の方程式は　$y=2x-2$

これらの共有点の x 座標は　$x^3-x=2x-2$　　$(x-1)^2(x+2)=0$　　よって　$x=-2,\ x=1$

ゆえに２つのグラフによって囲まれる部分の面積は

$$\int_{-2}^{1}(x-1)^2(x+2)dx=\int_{-2}^{1}(x-1)^2\{(x-1)+3\}dx=\int_{-2}^{1}\{(x-1)^3+3(x-1)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-1)^4+(x-1)^3\right]_{-2}^{1}=-\left\{\frac{1}{4}(-3)^4+(-3)^3\right\}=\mathbf{\frac{27}{4}}$$

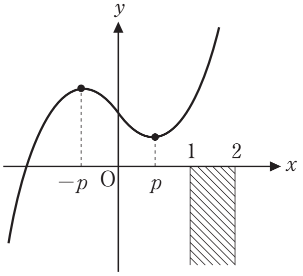
[2]　xy 平面において，不等式 $y\leqq x^3-3p^2(x-2)-q$ で定まる領域を D，不等式 $1\leqq x\leqq 2$，$y\leqq 0$ で定まる領域を E とする．E が D に含まれるための p，q についての条件を求めよ．また，この条件をみたす $(p,\ q)$ の領域を pq 平面に図示せよ．

$f(x)=x^3-3p^2(x-2)-q$　とおくと　$f'(x)=3x^2-3p^2=3(x+p)(x-p)$

$f(x)$ を p の関数とみると偶関数より，$p>0$ のときを考える．

領域 D は $y=f(x)$ のグラフの下側であり，

領域 E は右図斜線部．ともに境界含む．



よって，E が D に含まれるのは以下．

(i)　$0<p<1$ のとき　$f(1)\geqq 0$　$3p^2+1-q\geqq 0$　つまり　$q\leqq 3p^2+1$

(ii)　$1\leqq p\leqq 2$ のとき　$f(p)\geqq 0$　$-2p^3+6p^2-q\geqq 0$

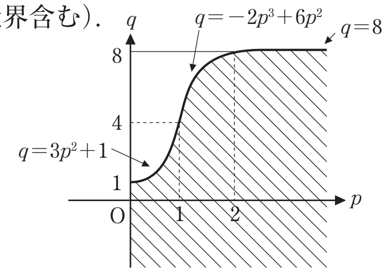
　つまり　$q\leqq -2p^3+6p^2=-2p^2(p-3)$

(iii)　$2<p$ のとき　$f(2)\geqq 0$　$8-q\geqq 0$　　つまり　$q\leqq 8$

　$p=0$ のときも(i)と同様である．

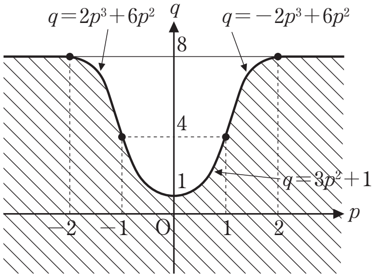
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって　$p \geqq 0$ のとき (p, q) の満たす領域は右図斜線部（境界含む）．
これを $p=0$ に関して折り返した図形が求める領域である．
ゆえに，条件をみたす (p, q) の領域は



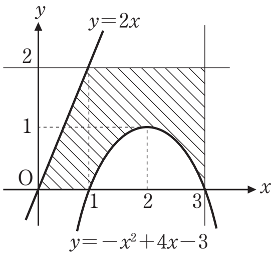
$$\begin{cases} -1<p<1 \text{ のとき} & q \leqq 3p^2+1 \\ 1 \leqq p \leqq 2 \text{ のとき} & q \leqq -2p^3+6p^2 \\ -2 \leqq p \leqq -1 \text{ のとき} & q \leqq 2p^3+6p^2 \\ p<-2,\ 2<p \text{ のとき} & q \leqq 8 \end{cases}$$

である．図示すると右図斜線部分（境界含む）．



> **3**　平面上で不等式 $0 \leqq y \leqq 2x \leqq 6$ および $-x^2+4x-3 \leqq y \leqq 2$ を同時に満たす領域を D とする．
> (1)　a は $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲の定数とする．このとき，不等式 $a \leqq x \leqq a+1$ を満たす領域と D との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ．
> (2)　a が $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値および最小値を求めよ．

領域 D は右図斜線部分．境界含む．



(1)　$0 \leqq a \leqq 1$ のとき

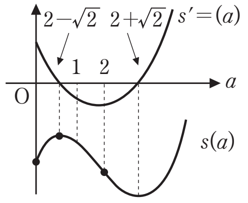
$$S(a)=\int_a^1 2xdx+\int_1^{a+1}\{2-(-x^2+4x-3)\}dx$$
$$=[x^2]_a^1+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_1^{a+1}$$
$$=1-a^2+\frac{1}{3}\{(a+1)^3-1^3\}-2\{(a+1)^2-1^2\}+5\{(a+1)-1\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}a^3-2a^2+2a+1}$$

$1 \leqq a \leqq 2$ のとき　$S(a)=\displaystyle\int_a^{a+1}\{2-(-x^2+4x-3)\}dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_a^{a+1}=\boldsymbol{a^2-3a+\frac{10}{3}}$

(2)　(i)　$0 \leqq a \leqq 1$ のとき　$S'(a)=a^2-4a+2$　　$a=2\pm\sqrt{2}$ のとき　$S'(a)=0$

よって，最大値は　$S(2-\sqrt{2})$

ここで　$S(a)=S'(a)\cdot\left(\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}\right)-\frac{4}{3}a+\frac{7}{3}$　より



$$S(2-\sqrt{2})=-\frac{4}{3}(2-\sqrt{2})+\frac{7}{3}=\frac{-1+4\sqrt{2}}{3}$$

$S(0)=1$，$S(1)=\frac{4}{3}$，より，最小値は 1

(ii)　$1 \leqq a \leqq 2$ のとき $S(a)=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{13}{12}$　最大値　$S(1)=S(2)=\frac{4}{3}$　最小値　$S\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{13}{12}$

(i)(ii)より，$S(a)$ の最大値は　$\boldsymbol{\frac{-1+4\sqrt{2}}{3}}$　最小値は　**1**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　２つの曲線 $y=x^2$ と $y=x^3-3x+3$ で囲まれる領域を D とする．次の問いに答えよ．

(1)　D を図示せよ．

(2)　点 (x, y) が D 上を動くとき，$3x+4y$ の最大値と，最大値を与える点 (x, y) を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 放物線 $C: y=x^2-4x+3$ と直線 $l: y=mx-m$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 放物線 C と直線 l が接するときの m の値 m_0 を求めよ．

(2) $m>m_0$ とする．放物線 C と直線 l および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とし，放物線 C と直線 l で囲まれた図形の面積を S_2 とする．S_1 と S_2 をそれぞれ m を用いて表せ．

(3) $m>m_0$ における S_2-2S_1 の最小値，およびそのときの m の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

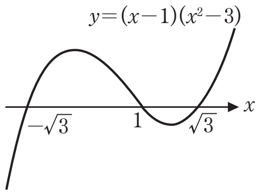
1　２つの曲線 $y=x^2$ と $y=x^3-3x+3$ で囲まれる領域を D とする．次の問いに答えよ．

(1)　D を図示せよ．

(2)　点 (x, y) が D 上を動くとき，$3x+4y$ の最大値と，最大値を与える点 (x, y) を求めよ．

解答例

(1)　$f(x)=x^2$，$g(x)=x^3-3x+3$　とおく．



$g(x) \geqq f(x)$ となる x を求めると

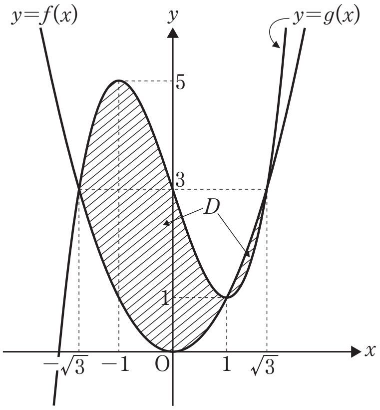
$x^3-x^2-3x+3 \geqq 0$　　$(x-1)(x^2-3) \geqq 0$

よって　$-\sqrt{3} \leqq x \leqq 1$，$\sqrt{3} \leqq x$

また　$g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$　より

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの概形は右図であり，

領域 D はその斜線部分である（境界含む）．



上下関係をはっきりさせて図示するためには，「交点の座標」だけがわかればいいのではない．よって，上下関係を「不等式」で表した．これは授業で触れた通り，微分した式が 0 になる点が大切ではなく，その正負をグラフで把握することが大切であることと共通．

(2)　$3x+4y=k$ とおき，$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{k}{4}$ $\left(\text{傾き} -\dfrac{3}{4} \text{の直線}\right)$ が領域 D と共有点をもつ条件のもとで，y 切片 $\dfrac{k}{4}$ が最大となるときを考える．

それは，(1)のグラフより以下のいずれかの場合である．

(i)　直線が点 $(\sqrt{3},\ 3)$ を通るとき

$k=3\sqrt{3}+12$

(ii)　直線が $y=g(x)$ のグラフと接するとき

$g'(x)=-\dfrac{3}{4}$　となるのは　$3x^2-3=-\dfrac{3}{4}$　より　$x^2=\dfrac{3}{4}$

(1)のグラフより　$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき．これが接点の x 座標．

このとき　$y=g\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{9\sqrt{3}}{8}+3$ より　$k=3\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+4\cdot\left(\dfrac{9\sqrt{3}}{8}+3\right)=3\sqrt{3}+12$

以上より，$3x+4y$ の最大値は　$\mathbf{3\sqrt{3}+12}$　これを与える $(x,\ y)$ は

$(\sqrt{3},\ 3)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{24+9\sqrt{3}}{8}\right)$

※最大となる状態は２択であり，どちらになるかはグラフからは判断できない．領域を利用した最大・最小ではこのように微妙な状態の判断を迫られるときがある．自明でない場合は必ずこのように両方の値を出して比較したという「跡」を残すことが必要である．今回は「どちらも最大」．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　放物線 $C: y=x^2-4x+3$ と直線 $l: y=mx-m$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　放物線 C と直線 l が接するときの m の値 m_0 を求めよ．

(2)　$m>m_0$ とする．放物線 C と直線 l および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とし，放物線 C と直線 l で囲まれた図形の面積を S_2 とする．S_1 と S_2 をそれぞれ m を用いて表せ．

(3)　$m>m_0$ における S_2-2S_1 の最小値，およびそのときの m の値を求めよ．

解答例

(1)　C と l の共有点の x 座標は

$x^2-4x+3=mx-m$　つまり　$x^2-(m+4)x+m+3=0$

$(x-m-3)(x-1)=0$　より　$x=m+3,\ 1$

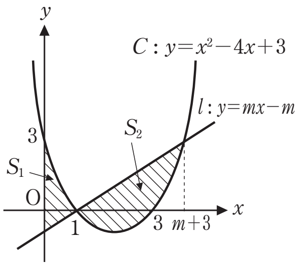
よって，この２つのグラフが接するのは　$m+3=1$

つまり　$m=-2$ のとき　　ゆえに　$\boldsymbol{m_0=-2}$

※通常ならば「判別式＝0」であるが，今回は y を消去して作成した x の方程式が「因数分解」できたので，交点の x 座標がわかってしまった．
さらに，(2)の S_2 においても，交点の x 座標を α，β とおくことなく面積を出すことができた．

(2)　$m>-2$ のとき　$C: y=(x-1)(x-3)$，$l: y=m(x-1)$ のグラフは下図．

$$S_1=\int_0^1\{x^2-4x+3-(mx-m)\}dx=\int_0^1\{x^2-(m+4)x+m+3\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{m+4}{2}x^2+(m+3)x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{m+4}{2}+m+3=\boldsymbol{\frac{1}{2}m+\frac{4}{3}}$$

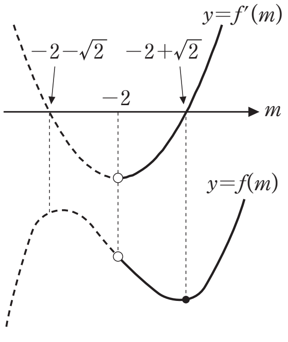


$$S_2=\int_1^{m+3}\{-x^2+(m+4)x-m-3\}dx$$
$$=-\int_1^{m+3}\{x-(m+3)\}(x-1)dx$$
$$=-\left\{-\frac{1}{6}(m+3-1)^3\right\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}(m+2)^3}$$

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(3)　$S_2-2S_1=\dfrac{1}{6}(m+2)^3-m-\dfrac{8}{3}=f(m)$　とおくと

$$f'(m)=\frac{1}{2}(m+2)^2-1=\frac{1}{2}\{(m+2)^2-2\}$$
$$=\frac{1}{2}(m+2+\sqrt{2})(m+2-\sqrt{2})$$



よって，$m>-2$ における最小値は　$\boldsymbol{m=-2+\sqrt{2}}$ のとき

$$f(-2+\sqrt{2})=\frac{1}{6}(\sqrt{2})^3-(-2+\sqrt{2})-\frac{8}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+6-3\sqrt{2}-8}{3}=\boldsymbol{\frac{-2-2\sqrt{2}}{3}}$$

※(2)で 1/6 公式を使うことにより，(3)が非常に楽になることが確認できたであろう．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。